



SÈRIE 1

1. a) Com que $f(0) = \frac{0}{-1} = 0$, el tall amb l'eix d'ordenades és al punt $(0,0)$. Per als talls amb l'eix d'abscisses, hem de resoldre l'equació $\frac{x^2-2x}{x-1} = 0$, que té com a solucions $x = 0$ i $x = 2$; per tant, els talls amb l'eix d'abscisses són $(0,0)$ i $(2,0)$.

Aquesta funció té una asímptota vertical a $x = 1$, ja que aquest punt és fora del domini i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$ (més precisament, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{+0} = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{-1}{-0} = +\infty$). A més a més, aquesta funció té una asímptota obliqua, ja que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x}{x^2-x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Com que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-2x}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x-1} = -1,$$

es tracta de la recta $y = x - 1$.

b) La derivada d'aquesta funció és:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Com que $f(0) = 0$ i $f'(0) = 2$, la recta tangent al punt $(0,0)$ tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x.$$

Anàlogament, com que $f(2) = \frac{4-4}{1} = 0$ i $f'(2) = \frac{4-4+2}{1} = 2$, la recta tangent al punt $(2,0)$ tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 4.$$



Proves d'accés a la Universitat 2025, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

Aquestes dues rectes són paral·leles ja que tenen el mateix pendent: $f'(0) = f'(2) = 2$.

c) Igualant la derivada a 1, ens queda una equació sense solució:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 \rightarrow 2 = 1.$$

Per tant, no hi ha cap punt on la recta tangent tingui pendent 1.

Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 p. pels punts de tall; 0,25 p. per l'asíptota vertical (encara que no distingeixin el límit per la dreta i per l'esquerra), i 0,5 p. per l'equació de l'asíptota obliqua. b) Compteu 0,25 p. pel càlcul de la derivada; 0,25 p. per cadascuna de les rectes tangents, i 0,25 p. per justificar correctament que són paral·leles. c) Compteu 0,25 p. per plantejar l'equació i 0,25 p. per veure que no té solució i respondre que la gràfica no té cap recta tangent amb pendent 1.

2. a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A' respectivament, són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & p+3 \\ p^2 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right)}_{A'}$$

En primer lloc, calculem el determinant de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + p^2 - 1 = p^2 - 1.$$

Igalant-lo a zero, en resulten els valors $p = 1$ i $p = -1$. Per tant, distingim els casos següents:

- Si $p \neq 1, -1$, el determinant de A és diferent de zero i, per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$, que és igual al nombre d'incògnites. Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat.
- Si $p = 1$, el determinant de la matriu de coeficients és zero; com que tenim el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, aleshores $\text{rang}(A) = 2$. Però la matriu ampliada té $\text{rang}(A') = 3$ gràcies, per exemple, al menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 - 4 - 3 = -2 \neq 0.$$



Per tant, el sistema és incompatible.

- Si $p = -1$, tenim el sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 5 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Eliminant la segona equació (per ser suma de la primera i la tercera), i com que la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ té rang 2, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Per al cas $p = -1$, es tracta del sistema:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - y = 3, \end{cases}$$

que és compatible indeterminat. Fent $y = \lambda$, s'obté $x = \lambda + 3$ i $z = \lambda - 2$. Per tant la solució del sistema és, en aquest cas, $(x, y, z) = (\lambda + 3, \lambda, \lambda - 2)$, amb λ real.

c) Per al cas $p = -1$, el sistema té les infinites solucions obtingudes a l'apartat anterior. Imposant, a més, que $xy = 10$, resulta $(\lambda + 3)\lambda = 10$; és a dir, $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$; d'aquí obtenim:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5, 2.$$

Per tant, el sistema té exactament dues solucions complint $xy = 10$, que són les corresponents a $\lambda = -5$ i $\lambda = 2$. Es tracta de $(x, y, z) = (-2, -5, -7)$ i $(x, y, z) = (5, 2, 0)$, respectivament.

Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 punts pel càlcul del determinant; 0,25 p. per determinar els valors crítics de p , i 0,25 p. per la discussió de cadascun dels tres casos. b) Compteu 0,5 punts pel càlcul correcte del conjunt de solucions (evidentment, poden triar qualsevol de les variables com a lliure). c) Compteu 0,25 p. pel plantejament de l'equació quadràtica; 0,25 p. per la seva resolució, i 0,25 p. pel càlcul dels dos punts resultants.

Comentaris: hi ha altres maneres de discutir i resoldre el sistema d'equacions. Compteu-les bé en la mesura que ho facin correctament i de manera justificada.



3. a) Considerem els successos aleatoris següents:

$$\begin{aligned}A &= \text{"la peça escollida és d'acer"}, \\F &= \text{"la peça escollida és de ferro"}, \\D &= \text{"la peça escollida és defectuosa"}.\end{aligned}$$

De les dades de l'enunciat tenim $P(F) = 0,6$, $P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$, $P(D|F) = 0,05$, $P(D|A) = 0,03$. Per la llei de probabilitats totals, la probabilitat que una peça sigui defectuosa és:

$$P(D) = P(D|F)P(F) + P(D|A)P(A) = 0,05 \cdot 0,6 + 0,03 \cdot 0,4 = 0,042.$$

b) Anomenem X el nombre de peces defectuoses en un paquet. De l'enunciat deduïm que X segueix una llei binomial amb $n = 5$ i probabilitat p . Per tant, la probabilitat que en un paquet hi hagi exactament quatre peces defectuoses és:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} p^4 (1 - p) = \frac{5!}{4!} p^4 (1 - p) = 5 p^4 (1 - p) = 5(p^4 - p^5).$$

També podem argumentar directament sense fer servir la llei binomial. Com que hi ha quatre peces defectuoses, n'hi haurà exactament una que no ho és. La probabilitat que una en concret (per exemple, la primera) sigui bona i les altres quatre defectuoses és $(1 - p)p^4$. Com que hi ha cinc possibilitats per escollir quina és la peça bona, $P(X = 4) = 5(1 - p)p^4 = 5(p^4 - p^5)$.

c) Busquem els extrems relatius de la funció $f(p) = 5(p^4 - p^5)$.

$$f'(p) = 5(4p^3 - 5p^4) = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0, \quad p = \frac{4}{5}.$$

Observem que $f(0) = 0$ i que $f\left(\frac{4}{5}\right) > 0$. Mirem el signe de la segona derivada:

$$f''(p) = 5(12p^2 - 20p^3) \quad \rightarrow \quad f''\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(12\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 20\left(\frac{4}{5}\right)^3\right) < 0.$$

i deduïm que a $p = \frac{4}{5}$ la funció $f(p)$ assoleix un màxim local. Com que per $p \in (0, \frac{4}{5})$ la funció creix i per $p > \frac{4}{5}$ la funció decreix, es tracta d'un màxim absolut quan p és no negativa. I el valor màxim serà $f\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^5\right) = 0,41$.



Criteris de correcció: a) Compteu 0,25 punts per plantejar la llei de la probabilitat total (o fer l'arbre de decisió o similar); 0,25 p. per identificar correctament les dades del problema, i 0,25 p. pel càlcul concret. b) Compteu 0,5 punts pel plantejament i 0,25 p. pel càlcul. c) Compteu 0,25 punts pel càlcul de la derivada i els punts crítics, 0,5 p. per argumentar que el màxim absolut en $p > 0$ es troba a $p = 4/5$, i 0,25 p. per trobar el valor d'aquest màxim.

4. OPCIÓ A. La vela ocupa la regió compresa entre les corbes $y = 0$, $x = 0$, i $y = -x^2 + 25$. Per calcular el cost total, caldrà calcular separatament l'àrea de la regió superior i l'àrea de la regió inferior i multiplicar-les cadascuna pel preu del material respectiu (niló o polièster).

Trobem primer els punts de tall entre les funcions involucrades: el punt de tall de $y = -x^2 + 25$ amb la part positiva de l'eix d'abscisses és:

$$y = 0 \rightarrow -x^2 + 25 = 0 \rightarrow x = 5.$$

L'abscissa positiva del punt de tall entre les corbes $y = -x^2 + 25$ i $y = 9$ és

$$-x^2 + 25 = 9 \rightarrow -x^2 = -16 \rightarrow x = 4.$$

L'àrea total sota la corba $y = -x^2 + 25$ entre els extrems $x = 0$ i $x = 5$ és

$$A_{total} = \int_0^5 (-x^2 + 25) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 25x \right]_0^5 = \frac{-125}{3} + 125 - 0 = \frac{250}{3} u^2.$$

L'àrea de la regió inferior és:

$$\begin{aligned} A_{inf} &= \int_0^4 9 dx + \int_4^5 (-x^2 + 25) dx = 9 \cdot 4 + \left[\frac{-x^3}{3} + 25x \right]_4^5 = \\ &= 36 + \left(-\frac{125}{3} + 125 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 100 \right) = 36 + \frac{14}{3} = \frac{122}{3} u^2. \end{aligned}$$

Finalment, l'àrea de la regió superior és la diferència:

$$A_{sup} = A_{total} - A_{inf} = \frac{250}{3} - \frac{122}{3} = \frac{128}{3} u^2.$$

Així doncs, el cost total de la vela serà:

$$\frac{128}{3} u^2 \cdot 50 \text{ €/}u^2 + \frac{122}{3} u^2 \cdot 70 \text{ €/}u^2 = \frac{6.400 + 8.540}{3} \text{ €} = 4.980 \text{ €}.$$



Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts pels punts de tall; 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió inferior, i 0,5 p. pel càlcul; 0,5 p. pel plantejament de l'àrea de la regió superior, i 0,5 p. pel càlcul, i, finalment, 0,25 p. pel càlcul del cost final.

Comentaris: hi ha altres maneres de plantejar el càlcul de les dues àrees. Compteu-les bé si ho fan correctament i de manera justificada.

4. OPCIÓ B. a) El pla π' que busquem té vectors directors $(1,1,0)$ i $\overrightarrow{PQ} = (3, -3, 6) - (1, -1, 2) = (2, -2, 4) \sim (1, -1, 2)$. Fent-lo passar pel punt P , serà el pla d'equació:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2 - z + 2 - z + 2 - 2y - 2 = 0$$

és a dir, $2x - 2y - 2z = 0$; o, simplificant, $x - y - z = 0$.

b) La recta que ens demanen és la intersecció del pla π' amb el pla perpendicular a $\overrightarrow{PQ} \sim (1, -1, 2)$ que passa pel punt mig:

$$M = \frac{P + Q}{2} = \frac{1}{2}(4, -4, 8) = (2, -2, 4).$$

Aquest pla té equació $x - y + 2z = D$ amb $D = 2 - (-2) + 2 \cdot 4 = 12$; és a dir, $x - y + 2z = 12$. Per tant, la recta demanada és:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - y + 2z = 12 \end{array} \right\}$$

Com que restant obtenim $z = 4$, es tracta de la recta:

$$(x, y, z) = (k + 4, k, 4) = (4, 0, 4) + k(1, 1, 0).$$

Criteris de correcció: **a)** Compteu 0,5 punts per plantejar correctament el problema i 0,5 pel càlcul de l'equació. **b)** Compteu 0,75 p. per calcular l'equació del pla perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ passant pel punt mig, i 0,75 p. per l'equació paramètrica de la recta intersecció amb π' .